

Indukció és rekurzív definíció

Célunk annak megmutatása, hogy a természetes számokról alkotott ismereteink meglepően kevés, mindössze öt alapvető és igaznak elfogadott szabályból, u.n. **axiómából** levezethetők. Munkánk kezdetén tehát csak az axiómákat ismerjük. Majd ezekből kiindulva logikai következtetések felhasználásával újabb és újabb állításokat bizonyítunk gazdagítva ezzel ismereteink táráát. Az axiomatikus tárgyalás megértése sokszor fáradságos, ám ismerete nem nélkülözhet a legfontosabb bizonyítási módszerek elsajátításához, a helyes matematikai gondolkodás kialakításához.

A természetes számok Peano axiómái

1. Axióma

Az 1 természetes szám.

2. Axióma

Minden n természetes számhoz létezik egy egyértelműen meghatározott $n\phi$ természetes szám, melyet az n **rákövetkezőjének** nevezünk.

3. Axióma

A 1 egyetlen természetes számnak sem rákövetkezője.

4. Axióma

Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor a két szám is egyenlő, vagyis ha $m\phi = n\phi$, akkor $n = m$.

5. Axióma

Legyen S természetes számokból álló halmaz. Ha

a) $1 \in S$ és

b) abból, hogy $n \in S$, következik, hogy $n\phi \in S$,

akkor S a természetes számok halmaza.

Jelölés

A természetes számok halmazát $\mathbb{N}$ -nel jelöljük.

Mit mondhatunk el a természetes számok halmazáról a Peano axiómák birtokában? Először is azt, hogy az $\mathbb{N}$ halmaz nem üres. Ezt az első axióma biztosítja, hiszen azt állítja, hogy $1 \in \mathbb{N}$. A második axióma szerint minden természetes számnak, így az 1-nek is van rákövetkezője és ez is természetes szám. Tehát $1\phi \in \mathbb{N}$. Ugyanezt megismételve kapjuk, hogy az 1ϕ rákövetkezője, vagyis $(1\phi)\phi$ is természetes szám, vagyis $(1\phi)\phi \in \mathbb{N}$. Az eljárást folytatva kapjuk a következő természetes számokat:

$$1, 1\phi, (1\phi)\phi, ((1\phi)\phi)\phi, (((1\phi)\phi)\phi)\phi, \dots$$

A harmadik axióma szerint a sorozat balra nem folytatható, mert nincs olyan természetes szám, aminek a rákövetkezője 1.

A negyedik axióma pedig (a harmadikkal együtt) azt biztosítja, hogy a sorozat elemei mind különböznek. Valóban a példa kedvéért tegyük fel, hogy

$$(1\phi)\phi = (((1\phi)\phi)\phi)\phi.$$

Ekkor a negyedik axióma szerint $1\phi = ((1\phi)\phi)\phi$, amiből a negyedik axióma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $1 = (1\phi)\phi$. Ez pedig azt jelenti, hogy 1 rákövetkezője az 1ϕ természetes számnak, ami a harmadik axióma szerint lehetetlen, hiszen a harmadik axióma éppen azt állítja, hogy az 1 egyetlen természetes számnak sem rákövetkezője. Tehát az a feltevés, hogy $(1\phi)\phi = (((1\phi)\phi)\phi)\phi$

ellentmondásra vezetett, tehát szükségképpen hamis. Hasonló gondolatmenet vezet el annak belátásához, hogy akármelyik két tagját veszem a sorozatnak, azok nem lehetnek egyenlők.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy ha vesszük az 1 természetes számot, majd a rákövetkezőjét, majd annak a rákövetkezőjét, és így tovább, akkor természetes számoknak egy sorozatát kapjuk. Ennek a sorozatnak első eleme 1, továbbá a sorozat minden elemére teljesül, hogy sorozat tle jobbra es eleme az rákövetkezője. Kérdés, hogy megkaptuk-e ezzel az eljárással az összes természetes számot? A válasz igen, ugyanis érvényes a következő.

6.1.1. Tétel

$$\mathbb{N} = \{1, 1\phi, (1\phi)\phi, ((1\phi)\phi)\phi, \dots\}$$

Bizonyítás

Jelöljük S -sel a természetes számok alábbi részhalmazát

$$S = \{1, 1\phi, (1\phi)\phi, ((1\phi)\phi)\phi, \dots\}$$

Ekkor $1 \in S$, tehát az ötödik axióma a) feltétele teljesül. Ugyanakkor az ötödik axióma b) feltétele is teljesül. Ugyanis ha választunk S -ből egy tetszőleges n elemet, akkor $n\phi$ is eleme lesz S -nek, hiszen az S elemeit éppen úgy állítottuk el, hogy sorra vettük az 1 rákövetkezőjét, majd annak a rákövetkezőjét és így tovább. Tehát megállapíthatjuk, hogy az S minden elemével együtt annak rákövetkezője is eleme S -nek. Ezzel beláttuk, hogy az S halmazra ötödik axióma mindkét feltétele teljesül. Akkor pedig S -re az ötödik axióma konklúziójának is teljesülnie kell. Kaptuk tehát, hogy $S = \mathbb{N}$.

A természetes számok rendezése

Látjuk tehát, hogy az összes természetes számot megkapjuk, ha vesszük az 1-et, majd az 1 rákövetkezőjét, majd annak a rákövetkezőjét, és így tovább. Másszóval az

$$1, 1\phi, (1\phi)\phi, ((1\phi)\phi)\phi, \dots$$

felsorolással megkapjuk az összes természetes számot. Ha ezt a felsorolást gondolatban "nagyság szerint növeked" felsorolásnak tekintjük,

$$1 < 1\phi < (1\phi)\phi < ((1\phi)\phi)\phi \dots$$

akkor eljutunk a természetes számok rendezésének fogalmához.

6.2.1. Definíció

Tekintsük az $a, b \in \mathbb{N}$ természetes számokat. Azt mondjuk, hogy a **kisebb, mint** b , ha $b \in \{a\phi, (a\phi)\phi, \dots\}$. Azt a tényt, hogy a kisebb, mint b , az $a < b$ jelsorozattal jelöljük.

Szemléletesen tehát azt mondhatjuk, hogy az $a < b$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha b a természetes számok felsorolásában a -tól jobbra esik. Ez alapján könnyen belátható a $<$ reláció két tulajdonsága.

1. Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$ (**transzitiv** tulajdonság).
2. Az $a = b$, $a < b$ és $b < a$ feltételek közül pontosan az egyik teljesül (**trichotóm** tulajdonság).

Valóban, ha b a -tól jobbra esik, c pedig b -től jobbra, akkor világos, hogy c a -tól (méginkább)

jobbra esik. Továbbá, ha a természetes számok felsorolásából találomra kiválasztjuk a -t és b -t, akkor vagy két egyforma elemet választottuk, ha pedig nem, akkor vagy b esik a -tól jobbra vagy fordítva.

▼ 6.2.2 Definíció

Tekintsük az $a, b \in \mathbb{N}$ természetes számokat. Azt mondjuk, hogy **a kisebb vagy egyenl, mint b** , ha

$$a < b \text{ vagy } a = b.$$

Ezt a tényt $a \leq b$ -vel jelöljük.

▼ 6.2.3 Tétel

Minden $a, b, c \in \mathbb{N}$ -re

1. $a \leq a$ (**reflexív** tulajdonság).
2. Ha $a \leq b$ és $b \leq a$ akkor $a = b$ (**antiszimmetrikus** tulajdonság)
3. Ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (**transzitiv** tulajdonság).
4. Az $a \leq b$ és $b \leq a$ közül legalább az egyik teljesül.

Bizonyítás

Az 1. állítás $a \leq$ definíciója alapján nyilvánvaló. Az antiszimmetria bizonyításához tegyük fel, hogy $a \leq b$ és $b \leq a$. Az els reláció azt jelenti, hogy $a < b$ vagy $a = b$, míg a második azt, hogy $b < a$ vagy $a = b$. Ám a $<$ reláció trichotóm, így $a < b$ és $b < a$ egyidejleg nem teljesülhet. Így szükségképpen $a = b$.

$A \leq$ tranzitivitása $a <$ tranzitivitásának közvetlen következménye.

Végül lássuk a 4. állítás bizonyítását! Mivel $<$ trichotóm, $a = b$, $a < b$ és $b < a$ közül pontosan egy teljesül. Ha ez $a = b$, akkor $a \leq b$ és $b \leq a$ közül mindkett teljesül. Ha $a < b$, akkor $a \leq b$, míg ha $b < a$, akkor $b \leq a$ teljesül. Ezzel belátuk, hogy $a \leq b$ és $b \leq a$ közül legalább az egyik teljesül.

A most bizonyított tételben szerepl négy tulajdonsággal rendelkező relációt **rendezési relációnak**, vagy röviden **rendezésnek** nevezzük. Azt mondhatjuk, tehát, hogy amit eddig tettünk, az nem más, mint hogy bevezettük a természetes számok egy rendezését.

▼ A teljes indukció tétele

A teljes indukció tétele egy nagyon gyakran használt bizonyítási módszert ad olyan állítások bizonyítására, amelyekben azt állítjuk, hogy valamely tulajdonság minden természetes számra teljesül.

▼ 6.3.1. Tétel (Teljes indukció tétele)

Legyen $T(n)$ egy tulajdonság, ami az n természetes számtól függ. Ekkor, ha

1) $T(1)$ teljesül, továbbá

2) abból, hogy $T(n)$ teljesül, következik, hogy $T(n + 1)$ is teljesül, akkor $T(n)$ minden n természetes számra teljesül.

A tétel megfogalmazásában szereplő formalizmus nem könnyen érthető. Ezért vegyünk egy példát. Legyen $T(n)$ az a tulajdonság, hogy " n páros szám". Ekkor $T(2)$ azt fejezi ki, hogy "2 páros szám". Mivel 2 valóban páros, ezért azt mondjuk, hogy a **T tulajdonság a 2 természetes számra teljesül**. Még rövidebben pedig azt, hogy $T(2)$ **teljesül**. Ezzel szemben például $T(3)$ nem teljesül, hiszen $T(3)$ azt fejezi ki, hogy "3 páros szám", ez pedig nem igaz.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a $T(n)$ tulajdonságra a tétel feltételei teljesülnek és legyen

$$S = \{ n \mid T(n) \text{ teljesül} \}.$$

Megmutatjuk, hogy az S halmazra teljesülnek az ötödik Peano axióma feltételei. Valóban $1 \in S$, hiszen T teljesül 1-re. Másrészt legyen $n \in S$ tetszőleges. Ha T teljesül n -re, abból a tétel 2) feltétele szerint az következik, hogy T teljesül $(n + 1)$ -re is. Ám ekkor $(n + 1) \in S$. Ezzel beláttuk, hogy az ötödik Peano axióma második feltétele is teljesül. Ekkor viszont az axióma konklúziója szerint $S = \mathbb{N}$, ami pedig pontosan azt jelenti, hogy T az összes természetes számra teljesül.

A tétel alkalmazásához vezessük be a következő jelölést! Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokból képzett $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeget jelöljük a

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

jelsorozattal, és ezt így olvassuk: "szumma i megy egytől n -ig a_n ". Tehát például a $\sum_{i=1}^3 a_i$ formula

úgy fejtendő ki, hogy az i változónak először az 1 értéket adjuk és ezzel képezzük $\sum$ jel alatti kifejezést. Esetünkben a_1 -et kapunk. Ezután eggyel megnöveljük az i változó értékét, vagyis vesszük az $i = 2$ értéket, és ezzel képezzük a $\sum$ jel alatti kifejezést. Most a_2 -t kapunk. Harmadik lépésben a_3 -t kapunk, és ezzel el is érjük az i utolsó értékét ($=3$), ami a $\sum$ jel fölött olvasható. Végül a kapott számokat összeadjuk és megkapjuk a kívánt három tagú összeget:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3.$$

Példák a Σ jel használatára

További példaként különösebb magyarázat nélkül felírunk néhány összeget. A formulák önmagukért beszélnek:

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$

$$\sum_{i=2}^4 i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2,$$

$$\sum_{i=1}^5 (2 \cdot i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$\sum_{i=1}^m i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + m^3.$$

Ki kell emelnünk két elfajuló esetet. Mi történik ugyanis, ha a végérték nem nagyobb a kezd értéknél? A egyenlőség esete még könnyen magyarázható, például:

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1.$$

Itt ugyanis vettük az i változó els értékét ($i = 1$), majd képeztük a_1 -et, és ezzel el is értük a végértéket. Így azután mindösszesen "egy számot kell összeadnunk". Elég természetesnek tnik, hogy ilyen esetben azt mondjuk: egy darab szám összege maga a szám.

Kissé furcsább helyzetet teremt az olyan formula értelmezése, mint pl. $\sum_{i=2}^1 a_i$. Itt ugyanis a

kezdérték nagyobb, mint a végérték, tehát "nulla darab számot kell összeadnunk". Nos ilyenkor úgy járunk el, hogy megegyezés szerint az üres összeget (vagyis nulla darab szám összegét) nullának tekintjük. Tehát azt mondjuk, hogy megegyezés szerint

$$\text{ha } m < k, \text{ akkor } \sum_{i=k}^m a_i = 0.$$

Most térjünk rá a teljes indukció tételének használatára és oldjuk meg a következ feladatot:

6.3.2. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2. \square$$

Legyen a $T(n)$ tulajdonság az következ

$$T(n) := \text{"Az els } n \text{ páratlan szám összege egyenl } n^2\text{-tel"}.$$

Mit kér számon tlünk a teljes indukció tételének els feltétele? Elsként annak ellenrzését, hogy $T(1)$ teljesül-e. Másszóval, igaz-e, hogy

$$\text{"Az els 1 páratlan szám összege egyenl } 1^2\text{-nel"}?$$

Ennek ellenrzése nem nehéz feladat. Az els 1 páratlan szám összege egytagú összeg, amelynek egyetlen tagja 1. Tehát

$$\sum_{i=1}^1 2 \cdot i - 1 = 1.$$

Másrészt

$$1^2 = 1.$$

A jobb oldalak egyenlsége maga után vonja a bal oldalak egyenlségét. Ez pedig azt mutatja, hogy a T tulajdonság 1-re teljesül, tehát kielégíti a teljes indukció tételének els feltételét.

A második feltétel már kicsit nehezebb ügy. Itt egy következtetés helyességét kell belátnunk. Azt kell megmutatni, hogy abból a feltételezésből, hogy $T(n)$ teljesül, következik az, hogy $T(n + 1)$ is teljesül. Más szavakkal, ha feltesszük, hogy T teljesül az n természetes számra, akkor meg kell tudnunk mutatni, hogy T a rákövetkez természetes számra, vagyis $(n + 1)$ -re is teljesül.

Nos lássuk! Tegyük fel, hogy T teljesül n -re, tehát hogy

"Az els n páratlan szám összege egyenl n^2 -tel".

Ezt a feltételt **indukciós feltevésnek nevezzük**. Meg kell mutatnunk, hogy az indukciós feltevés mellett T teljesül $n + 1$ -re is, vagyis hogy

"Az els $n + 1$ páratlan szám összege egyenl $(n + 1)^2$ -tel".

Hogy keletkezett a bizonyítandó állítás az indukciós feltevéből? Úgy, hogy benne az n összes elfordulása helyébe $(n + 1)$ -et helyettesítettünk. Ezek után lássunk neki a számolgatásnak!!

$\sum_{i=1}^{n+1} 2 \cdot i - 1 =$ # az els $n + 1$ páratlan szám összegét
megkapjuk, ha vesszük az els n összegét és hozzáadunk $(n + 1)$ -ediket

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n (2 \cdot i - 1) + 2 \cdot (n + 1) - 1 = && \# \text{ az indukciós feltevés és összevonás} \\ &= n^2 + 2 \cdot n + 1 = && \# \text{ két tag négyzete} \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

és éppen ez az, amit meg kellett mutatnunk.

A teljes indukciós bizonyításoknak azonban nem kerítünk mindig ekkora feneket. Nem vezetjük be külön a $T(n)$ tulajdonságot, hiszen az magából a bizonyítandó állításból nyilvánvaló módon látható. Ennek megfelelően a $T(1)$ igaz voltának vizsgálata helyett egyszerűen megnézzük, hogy a bizonyítandó állítás $n = 1$ -re teljesül-e. Mint látni fogjuk, ez az esetek többségében eléggé nyilvánvaló lesz.

Az indukciós feltevést is egyszerűbben kezeljük. Azt mondjuk: "tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás teljesül az n természetes számra". Majd ezt a feltételezést felhasználva megmutatjuk, hogy a bizonyítandó állítás akkor is teljesül, ha benne n minden elfordulása helyébe $(n + 1)$ -et írunk. Ezzel a lépéssel elvégezzük a teljes indukció tétele második feltételének ellenrzését. Ezt az eljárást szokás **n szerinti teljes indukciónak** nevezni.

További példák teljes indukciós bizonyításokra

6.3.3. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2. \square$$

1. Lépés. Ellenrizzük az állítást $n = 1$ -re.

Az állítás bal oldala $n = 1$ esetén $\sum_{i=1}^1 i^3 = 1$, míg jobb oldala $n = 1$ esetén $\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right)^2 = 1$. Tehát az állítás $n = 1$ -re igaz.

2. Lépés. Indukciós feltevés: tegyük fel, hogy az állítás teljesül az n természetes számra. Meg kell mutatnunk, hogy az indukciós feltevés teljesülése esetén az állítás akkor is teljesül, ha benne n minden elfordulása helyébe $n + 1$ -t helyettesítünk. Tehát megmutatandó a

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right)^2$$

egyenlőség. Lássuk a számolást!

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 =$$

$n + 1$ tagú összeget megkapjuk, ha vesszük az

els n szám összegét és hozzáadjuk az $(n + 1)$ -ediket

$$= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 =$$

az indukciós feltevés

$$= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 =$$

$(n+1)^2$ kiemelhet

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) =$$

közös nevezre hozás

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2 + 4 \cdot n + 4}{4} \right) =$$

$n^2 + 4 \cdot n + 4 = (n+2)$

$$= \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right)^2$$

Ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük.

Gyakran találkozunk olyan állításokkal, amelyek az összes természetes számra ugyan nem teljesülnek, ám a kivételek száma véges. Ebben az esetben az mondható el, hogy található olyan k természetes szám amittl kezdve az állítás már minden természetes számra teljesül. Az állítások bizonyítása során úgy járunk el, hogy a teljes indukció els lépését nem $n = 1$ -re, hanem $n = k$ -ra hajtjuk végre, majd az indukció második lépését változatlan formában végezzük el.

6.3.4. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 4$ természetes számra

$$2^n < n!. \square$$

1. Lépés. Az állítást $n = 4$ -re teljesül, mert $2^n = 16 < 24 = 4!$.

2. Lépés. Indukciós feltevés: tegyük fel, hogy állításunk teljesül az n természetes számra. Ekkor

$$\begin{aligned}
 2^{n+1} &= && \# \text{ hatványozás azonossága} \\
 &= 2 \cdot 2^n < && \# \text{ indukciós feltevés miatt a szorzat } n, \text{ ha } 2^n \text{ helyébe } n! \text{-t írunk} \\
 &< 2 \cdot n < && \# n \geq 4 \text{ miatt növeljük a szorzatot, ha } 2 \text{ helyett } (n+1) \text{-et írunk} \\
 &< (n+1) \cdot n! = (n+1)!
 \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az állítás $(n+1)$ -re is teljesül.

Háromszögszámok

A régi görögök játékos elmék voltak. Szerettek számokkal játszani és szerették a számokat kavicsokkal kirakni. Annyi kavicsot vettek, amilyen számmal játszani szerettek volna és a kavicsokat különböz alakzatokba helyezték el. Észrevették, hogy bizonyos számok esetén a kavicsok háromszög alakzatba rendezhetk. Azokat számokat, melyekre ez a tulajdonság teljesül **háromszögszámoknak** nevezzük. Az ábra alapján mondhatjuk, hogy 1, 3, 6, és 10 háromszögszámok.

1	2	3	4
$T_1 = 1$	$T_2 = 3$	$T_3 = 6$	$T_4 = 10$

Ezek az alakzatok sok érdekes megfigyelésre adnak alkalmat. Elsként fedezzük fel a kapcsolatot a háromszögszámok és baloldali szomszédjuk között! Vegyük észre, hogy a háromszög szám baloldali szomszédja feltnik az alakzat fels felén és kiegészül egy új sorral. Ebben a sorban pontosan annyi elem van amennyi a vizsgált alakzat sorszáma. Tehát a második háromszögszám úgy keletkezik az elsbl, hogy ahhoz kettő adunk. A harmadik a másodikból úgy, hogy a másodikhoz hármat adunk, és így tovább.

$$T_2 = T_1 + 2, T_3 = T_2 + 3, \dots$$

Általánosan

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)$$

Ez az egyenlség a $T_1 = 1$ egyenséggel együtt az összes háromszögszámot, vagyis minden n -re T_n -et meghatározza. Ezt a teljes indukció tétele biztosítja. Ugyanis T_1 meghatározott, értéke 1. Ha pedig T_n -t már ismerjük, akkor abból már T_{n+1} -et megkapjuk úgy, hogy értékéhez $n+1$ -et adunk.

Így tehát ez a két egyenlőség valóban alkalmas a háromszögszámok definiálására.

▼ 6.4.1. Definíció

1. $T_1 = 1$

2. $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$

A T_n számot a **n -edik háromszögszámnak** nevezzük.

Ez a definíció a háromszög számokat **rekurzív** ("visszafutó") módon definiálja. Az $(n + 1)$ -edik háromszög szám meghatározásához ugyanis felhasználja az n -edik háromszög számot.

A rekurzív definíció alapján n -edik háromszögszám kiszámítása megköveteli az összes n -nél kisebb háromszögszám kiszámítását. Nézzük meg példaként, hogy számíthatjuk ki a 4. háromszögszámot. Az első háromszögszámtól indulunk, erről tudjuk, hogy 1, majd ebből elállítjuk a másodikat, majd a harmadikat, és a negyediket.

$T_1 = 1$, # a rekurzív definíció 1. pontja

$T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, # a rekurzív definíció 2. pontja

$T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$, # a rekurzív definíció 2. pontja

$T_4 = T_3 + 4 = 6 + 4 = 10$. # a rekurzív definíció 2. pontja

A kézi számolási sémát az alábbiakban mutatjuk be.

Inicializálás

$n = 4$	
k	T_k
1	1
2	
3	
4	

Az első oszlopba felvesszük az 1, 2, 3 és 4 számokat. A második oszlop első sorába 1-et írunk, ez az első háromszög szám.

Végrehajtás

$n = 4$	
k	T_k
1	1
2	3
3	6
4	10
$T_4 = 10$	

A második oszlop celláit felülről lefelé haladva töltjük ki. Az aktuális cella tartalmát úgy kapjuk, hogy a felette lévő és a mellette lévő cella tartalmát összeadjuk.

Vegyünk észre, hogy a 4. háromszög szám meghatározása során minden lépésben csak az utoljára kiszámolt háromszögszámmal van szükségünk. Ez persze nem meglepő a rekurzív definíció ismeretében. Mégis ez az észrevétel vezet el bennünket a háromszögszámokat előállító

algoritmus megfogalmazásához.

6.4.2. Algoritmus: Háromszögszámok

Szöveges leírás	Maple metakód
1. <u>Input</u>: n természetes szám 2. A T kezd értéke legyen 1 (1 az els háromszögszám) 3. A i változó 2, 3, ..., n értékére hajtsuk végre a következő utasításokat Legyen $T := T + i$ (az új háromszögszám az előző i hozzáadásával keletkezik) 4. <u>Output</u>: T az n-edik háromszög szám	Input: n természetes szám $T := 1$ for i from 2 to n do $T := T + i$; od <u>Output</u>: T az n-edik háromszögszám

6.4.2.3. Maple implementáció

```
> restart;
```

```
> with(ant):
```

Az **mszögszám** eljárás els paramétere azt mondja meg, hogy háromszög-, négyszög-, stb számot illetve számokat akarunk létrehozni. A második paraméterként megadott természetes szám pedig azt írja el, hogy ezek sorozatából hányadikra vagyunk kíváncsiak.

```
> mszögszám(3, 5);
```

15

(1.4.3.1)

Ha második paraméterként intervallumot adunk, akkor az **mszögszám** eljárás kilistázza mindazokat az m -szögszámokat, amelyek indexe a megadott intervallumba esik.

```
> mszögszám(3, 10, list);
```

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

(1.4.3.2)

```
> mszögszám(3, 6, ini, cal);
```

A rekurzív definíciójuk ismeretében könnyen bizonyíthatjuk a háromszögszámok különböző tulajdonságait. Például figyeljül meg, hogy mi történik, ha két szomszédos háromszögszámot összeadunk.

$$T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$$

Mindkét esetben egy szám négyzetéhez jutunk. Vajon megmarad-e ez a szabályosság általánosan is? A választ a következő tétel adja.

6.4.3. Tétel

Minden n természetes számra

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2.$$

Bizonyítás

Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás, mint láttuk, $n=1$ -re teljesül. Eddig rendben. Tegyük fel, hogy állításunk teljesül az n természetes számra. Meg kell mutatnunk, hogy

$$T_{n+1} + T_{n+2} = (n+2)^2.$$

Használjuk fel a háromszögszámokat definiáló rekurzív formulát, és alkalmazzuk azt mind T_{n+1} -re, mind pedig T_{n+2} -re.

$$\begin{aligned} T_{n+1} + T_{n+2} &= & \# \quad T_{n+1} &= T_n + (n+1) \text{ és} \\ T_{n+2} &= T_{n+1} + (n+2) \\ &= T_n + (n+1) + T_{n+1} + (n+2) = & \# \text{ indukciós feltevés és összevonás} \\ &= (n+1)^2 + 2 \cdot n + 3 = & \# \text{ négyzetre emelés elvégzése} \\ &= n^2 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = & \# \text{ összevonás} \\ &= n^2 + 4 \cdot n + 4 = & \# \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

Ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük.

Ha azok a háromszögszámok, amelyek háromszög alakzatba rendezhetők, akkor a négyzetszámok azok, amelyek négyzet alakzatba rendezhetők, mondták a régi görögök.

1	2	3	4
$S_1 = 1$	$S_2 = 4$	$S_3 = 9$	$S_4 = 16$

A négyzetszámok is szép szabályos kapcsolatban vannak baloldali szomszédjukkal. Figyeljük meg például, hogy a S_4 bal alsó sarkában feltnik a harmadik négyzetszám, ami kiegészül egy L alakú alakzattal, melynek sorában 4, oszlopában pedig $3 = 4 - 1$ elem van. Így mindösszesen $4 + (4 - 1) = 2 \cdot 4 - 1$ elemmel bővül S_4 az S_3 -hoz képest. Ez az észrevétel elvezet bennünket a négyzetszámok rekurzív definíciójához.

▼ 6.4.4. Definíció

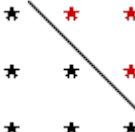
1. $S_1 = 1$

2. $S_{n+1} = S_n + (2 \cdot n + 1)$

A S_n számot a **n -edik négyzetszámnak** nevezzük.

Szemmel látható, hogy minden négyzetszám valamely szám négyzete, pontosabban minden n -re $S_n = n^2$, ami azt fejezi ki szemléletesen, hogy a négyzetszámok nem csak azért négyzetszámok, mert négyzet alakzatba rendezhetők, hanem azért is, mert egyenként valamely természetes szám négyzetével, vagyis második hatványával. Az állítás teljes indukciós bizonyítását az olvasóra bízunk.

A négyzet alakzatban elhelyezett elemek egy vonallal ketté vághatók a négyzet fátlója mentén. Ez a vonal a négyzet számot két háromszögszámmra osztja, mégpedig oly módon, hogy az egyik háromszögszám sorszáma megegyezik a vizsgált négyzetszám sorszámaival, a másiké pedig eggyel kisebb.

3	4	5
		
$S_3 = T_3 + T_2$	$S_4 = T_4 + T_3$	$S_5 = T_5 + T_4$

Geometriai szemléletünk alapján nem kételkedünk abban, hogy minden n természetes számra érvényes a következő összefüggés

$$S_{n+1} = T_{n+1} + T_n.$$

Nagyon azonban ne lepdjünk meg felfedezésünkön, ugyanis ez nem más mint a 2.11 tétel.

Példák

A következő utasítássorozat kísérletezésre ad alkalmat. Ha az $n := 7$ utasításban a 7 helyébe más-más természetes számot írunk, majd **Enter**-t ütünk, akkor a Maple az adott index háromszögszámhoz adja hozzá a rákövetkezt, majd kiszámítja ugyanilyen index négyzetszámot. Hajtsuk végre annyi kísérletet, ami meggyz bennünket a háromszögszámok és négyzetszámok fenti összefüggéséről!

> n:=7:

```

cat(n, ` . háromszögszám` )=mszögszám(3,n);
cat(n+1, ` . háromszögszám` )=mszögszám(3,n+1);
%%+%;
cat(n+1, ` . négyzetszögszám` )=mszögszám(4,n+1);

```

Tökéletes számok

Els eladásunkon a tökéletes számok közül megimkedtünk a 6-tal és a 28-cal. Emlékeztetül, a tökéletes számok azok, amelyek megegyeznek a tlük különböz osztóik összegével. Felírva az els 20 háromszögszámot

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210

azonnal szembe tnik, hogy mind a 6, mind a 28 szerepel a háromszögszámok sorozatában.

Célszer lenne megnézni további tökéletes számokat is! A harmadik páros tökéletes szám a 496. Lássuk, hogy háromszög szám-e? Kezdjük próbálkozással!. Azt már láttuk, hogy a 20-adik háromszögszám kisebb, mint 496. Vegyük a 40-ediket. Ha ez már nagyobb, akkor vegyünk kisebb sorszámú háromszögszámokat. Elbb-utóbb rátaláluk a megoldásra, $T_{31} = 496$.

```

> with(ant):
> mszögszám(3,7);

```

28 (1.5.1)

Ezen fellelkesülve nézzünk meg még egy tökéletes számot, a 8128-at. Ugyanis ez a 496 utáni els páros tökéletes szám, páratlant meg nem ismerünk. Ha elvégeztük a kísérletet, akkor megkaphattuk, hogy a 8128 nem más, mint a 127-dik háromszögszám.

Ennyi egybeesés már nem lehet véletlen Valóban megmutatható, hogy minden páros tökéletes szám egyben háromszögszám is. Hát nem szép ez, kérem? A tökéletességet a számok alkotó részeinek összerakásából a háromszögszámokat pedig a számok egy geometriai tulajdonságából kiindulva vezettük be. És mi derül ki? Hogy a kett szoros kapcsolatban van egymással, a tökéletesség maga után vonja a háromszögséget! Hogy ebből a pithagoreusok milyen következtetést vonnának le az emberi társadalom különböz területeire vonatkozóan, annak megsejtésére most nem vállalkozunk.

Ellenrz kérdések

1. Soroljuk fel a Peano axiómákat. Külön figyeljünk az ötödikre!
2. Hogy definiálható a természetes számok rendezése a Peano aximák alapján?
3. Soroljuk fel a $<$ és a $\leq$ relációk tulajdonságait. Mit jelent a tranzitívitas? És a trichotómia?
4. Mondjuk ki a teljes indukció tételét! (Legalább háromszor egymás után!)

5. A gyakorlatban hány lépésből áll a teljes indukciós bizonyítás végrehajtása?
6. Mi a teljes indukciós bizonyítás első lépése?
7. Mit nevezünk indukciós feltevésnek? És a második?
8. Írjuk le szavakkal, hogy mit rövidít a $\sum_{i=1}^n a_i$ formula.
9. Adjuk meg a háromszög számok rekurzív definícióját.
10. Adjuk meg a négyzetszámok rekurzív definícióját.
11. A háromszögszámokat elállító kézi számoló tábla segítségével számítsuk ki a 7. háromszögszámot!
12. Ismertessük a háromszögszámokat elállító algoritmust. Vessük ezt össze a számoló táblán elvégzendő műveletekkel!